CONCOURS ESTP-ENSAM

Filière PC

MATHÉMATIQUES 2

Durée: 4 heures

Nota: les cinq sujets sont indépendants et peuvent être traités, à la rigueur, dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très distinctement *leur numéro. Leur 5ème question est, en général, la plus difficile. Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir* encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés.*

SUJET 1

Soit (x_n) la suite réelle déterminée par $x_0 > 0$ et $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$ pour $n \geq 1$.

1 Montrer que cette suite (x_n) tend vers $+\infty$.

2 Établir que, pour $n \geq 1$, on a $x_n^2 = x_0^2 + 2n + + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$.

3 Déterminer la constante A telle que $x_n \sim A\sqrt{n}$. [Utiliser le résultat précédent en notant que $x_k^2 \geq 2k$.]

4 Soit $y_n = x_n - A\sqrt{n}$. Démontrer que la suite (y_n) admet une limite finie L à préciser.

5 On suppose maintenant n FIXÉ et x_0 VARIABLE, que l'on appellera plutôt t pour la commodité, $t>0$. Ainsi, $x_0(t) = t$, $x_1(t) = t + \frac{1}{t}$, $x_2(t) = t + \frac{1}{t} + \left[t + \frac{1}{t} \right]^{-1}$, etc... Montrer qu'il existe une suite b_n, indépendante de t, à déterminer, telle que, quand $t \to +\infty$, on a $x_n(t) = t + \frac{n}{t} + \frac{b_n}{t^3} + O(\frac{1}{t^5})$.

SUJET 2

Pour x réel $\neq 0$, soit $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$, $f(0) = 1$, et $g(x) = (f(x))^2$. Le logarithme népérien de x se note $\ell n(x)$.

1 Montrer que $f(x)$ est développable en série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence R.

2 Préciser $f^{(n)}(0)$, dérivée d'ordre n de $f(x)$ en $x = 0$.

3 Comparer $f(x)$ et $\int_0^1 e^{-xt} dt$. Établir que $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $x \geq 0$.

4 Calculer $g^{(n)}(0)$, n entier ≥ 0.

5 Soit $h(x) = \int_0^x f(t) dt$. Prouver que $h(x) - \ell n(x)$ tend vers une limite finie si x tend vers $+\infty$.

SUJET 3

Soit $f_n(x) = x^n \sin(x)$, x réel, n entier ≥ 0, et $I_n = \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx$.

1 Établir l'existence de $a_n \in [\frac{\pi}{2};\pi[$, tel que la fonction f_n croît sur $[0;a_n]$ et décroît sur $[a_n;\pi]$.

2 Que dire de la limite de la suite (b_n) telle que $b_n = f_n(a_n)$?

3 Par intégration par parties, préciser p_n et q_n tels que $I_n = p_n + q_n I_{n-2}$, $n \geq 2$.

4 La suite (I_n) tend-elle vers une limite finie ou infinie ?

5 Cette suite (I_n) est-elle monotone ?

SUJET 4

On définit f, fonction paire de période 2π, par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ si $x \in [0;\frac{\pi}{4}]$ et $f(x) = 0$ si $x \in]\frac{\pi}{4};\pi]$.

1 Préciser l'ensemble $E \subset [0;\pi]$ où $f(x)$ égale sa série de Fourier: $f(x) = a_0 + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + \ldots$

2 Calculer a_0 .

3 Pour $n \geq 2$, mettre $a_n + a_{n-2}$ sous la forme $\frac{c}{n-1}.\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{4}\right]$, la constante c étant à préciser.

4 Établir que la série $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \ldots$ converge. On désigne par s sa somme.

5 Pour tout $x \in [0;\frac{\pi}{4}]$, établir la relation $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 4\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$. Calculer s .

SUJET 5

On note E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues bornées sur $]0;+\infty[$. Pour $f \in E$, on considère les équations différentielles:

(𝔻): $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x)$, $x > 0$

(ℍ): $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, $x > 0$

1 Préciser les réels r_1 et r_2, avec $r_1 < r_2$, tels que x^{r_1} et x^{r_2} soient solutions de (ℍ), $x > 0$.

2 Établir que $g(x) = \int_0^x -\frac{t}{3x^2} f(t)\,dt + \int_x^{+\infty} -\frac{x}{3t^2} f(t)\,dt$ est solution de (𝔻), $x > 0$.

3 On appelle T l'application qui à $f \in E$ associe g. S'agit-il d'un isomorphisme de E ?

4 Pour $\varphi \in E$, soit $\|\varphi\| = \sup_{x>0} |\varphi(x)|$. Déterminer une constante $C > 0$, telle que $\|g\| \leq C\|f\|$.

5 On suppose l'existence de $\lambda = \lim_{x\to 0} f(x)$. Montrer l'existence de $\mu = \lim_{x\to 0} g(x)$, et fournir sa valeur.